Disciplina: Pré - Cálculo

Unidade 2 - Grandezas Proporcionais

2.1. Razão e Proporção

Grandezas proporcionais, aplicações de razão e proporção em diversas situações

2.1.1. Razão

Dados dois números ***a*** e ***b***, com ***b***≠0, chama-se razão entre ***a*** e ***b*** ao quociente indicado por (***a*:*b***) ou *a*/*b*.

Nome dos termos: ***a*** é 1º termo ou antecedente e ***b*** é o 2º termo ou consequente.

2.1.1.1. Razão entre grandezas da mesma espécie

A razão de duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que medem essas grandezas numa mesma unidade.

Exemplo

As soluções A e B são preparadas para desinfetar as mãos, como ação preventiva conta a o coronavírus. A solução A contém 213 litros de água e 47 litros de álcool. A solução B, contém 55 litros de álcool e 258 litros de água. Qual das duas soluções tem maior teor alcóolico? Seguem diversas aplicações de razão.

Aplicação 1: Escala

Escala em matemática(E) é a razão entre a medida de um comprimento no desenho(d) e a medida correspondente ao comprimento real(D), obtida a partir das medidas expressas na mesma unidade.

A escala, utilizada em desenhos técnicos e mapas, é a razão entre dois números após transformação de medidas para a mesma unidade. Além disto, existem normas técnicas uso e formas de expressão.

Para escala reduzida é utilizada a razão d/D, e para escala ampliada é utilizada a razão inversa.

Relação da escala reduzida

$$E = \frac{d}{D}$$

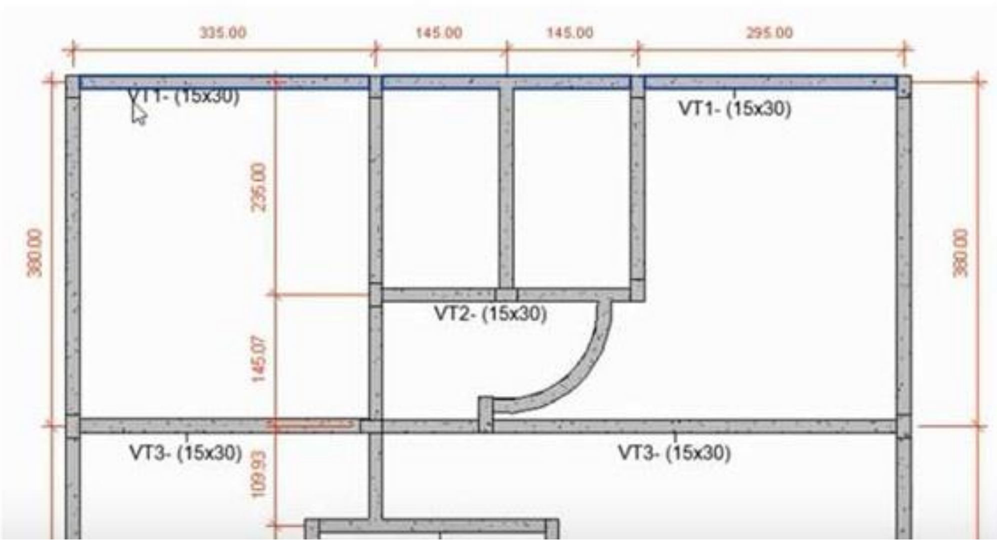
Relação da escala ampliada:

$$\frac{d : d}{D : d} = \frac{1}{E} \; ou \; 1 : E$$

Acesse o vídeo do endereço a seguir.

https://www.youtube.com/watch?v=NH9b4wn7f4E&feature=youtu.be&t=37

Mais aplicações de escala



Fonte: < https://www.youtube.com/watch?v=D7jUSnZYLbk> Acesso em mar. 2019.

Exemplos de escala ampliada

No desenho técnico peças minúsculas de máquinas, fotos com utilização do recurso macro.

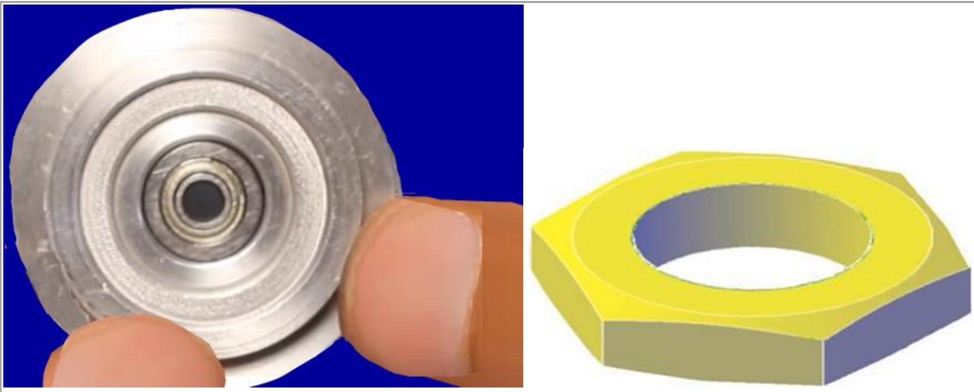


Imagem 1:< https://www.youtube.com/watch?v=C9Nn_wgWNEs >acesso em

2.2.1.2 Razão entre grandezas de espécies diferentes

A razão de duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que medem essas grandezas numa mesma unidade.

Aplicação da razão em resistência de materiais

A tensão é definida pela seguinte razão: Tensão(s) = F/A

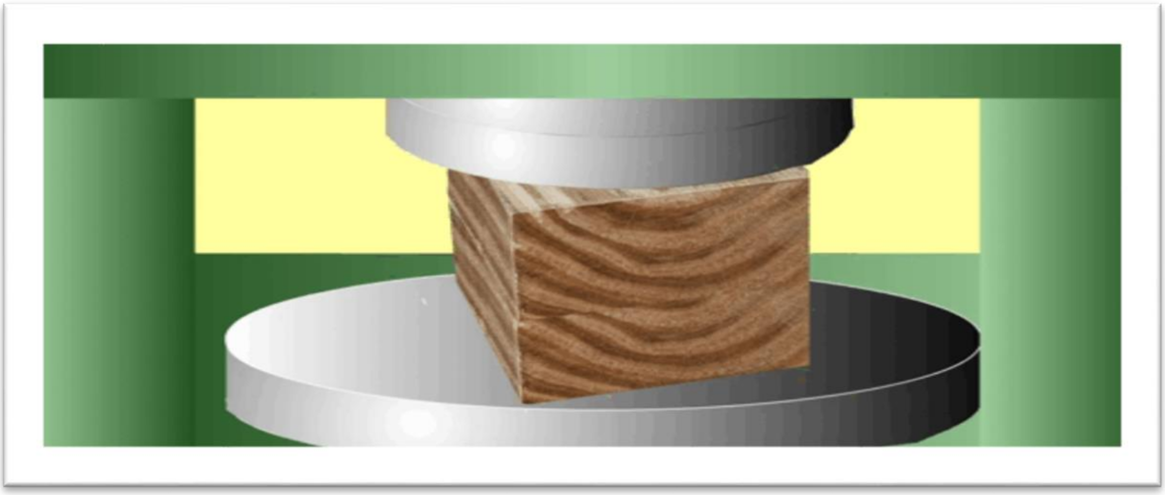
A tensão é dado em MPa(N/mm²) onde **F** é a força (ou carga) aplicada sobre a área inicial **A**.

Fonte:<http://www.ufjf.br/lrm/files/2009/04/tracao_aco_log.wmv> Acesso em mar. 2019. Com adaptações.

Deformação

A deformação é a razão entre a variação(Dl) de comprimento final(lf) e o comprimento inicial(l0).

$$e = \frac{lf - l0}{l0} \; ou \; \frac{Dl}{l0}$$



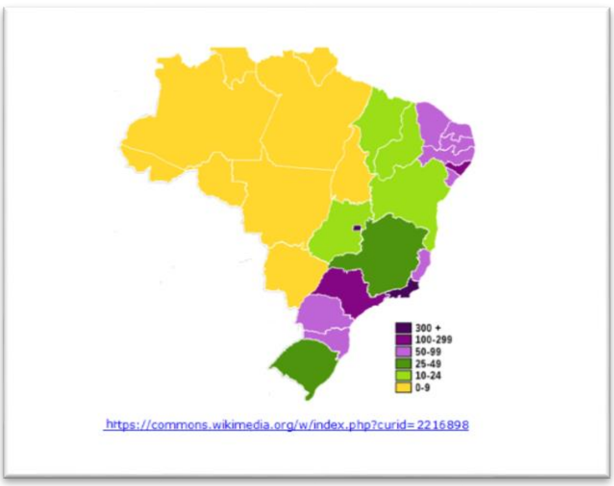
Fonte: UNIJUÍ

Aplicação da razão em medidas de densidade

Densidade demográfica

A densidade demográfica é a razão entre a população total de uma região(P) e a área da região em km^2(A)

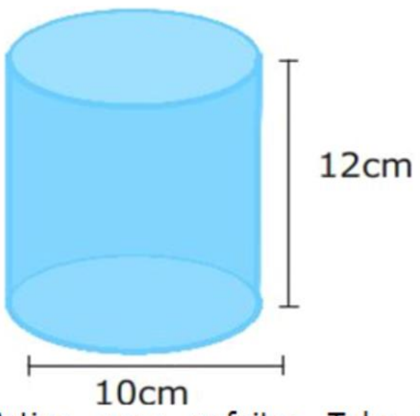
$$DP = \frac{P}{A}.$$



Densidade de um corpo

Densidade de um corpo: razão entre a massa de um corpo e o seu volume.

$$\text{Densidade} = \frac{\text{Massa(kg)}}{\text{Volume}(m^3)}$$



Artigo para enfeite: Tubo de vidro macico com forma de um cilindro A **massa** é de 2,3569kg

Volume ocupado no espaço:

Volume=$\pi r^2 h$

$(5^2.12.\pi)cm^3 = 942,48cm^3$

$(1cm^3=10^{-6}m^3)$

$942,48cm^3 = 942,48x10^{-6}m^3$

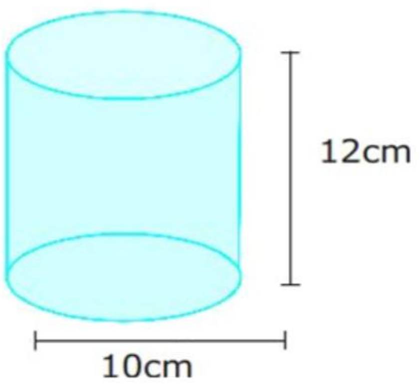
$942,48x10^{-6}m^3 = 0,00094248m^3$.

A **massa** é de 2,3569kg

$$\text{Densidade}=\frac{\textbf{massa}}{\text{Volume}}$$

$$\text{Densidade}=\frac{2,3569kg}{0.00094248m^3}$$

Densidade=2500kg/m³.



Artigo para enfeite: Tubo de vidro com forma de um cilindro, oco por dentro. O **peso** é de 0,4712kg

Volume ocupado no espaço:

Volume=$\pi r^2 h$

$(5^2.12.\pi)cm^3 = 942,48cm^3$

$(1cm^3 = 10^{-6}m^3)$

$942,48cm^3 = 942.48x10^{-6}m^3$

$942.48x10^{-6}m^3 = 0,00094248m^3$

Volume $= 0,00094248m^3$

O **peso** é de 0,4712kg

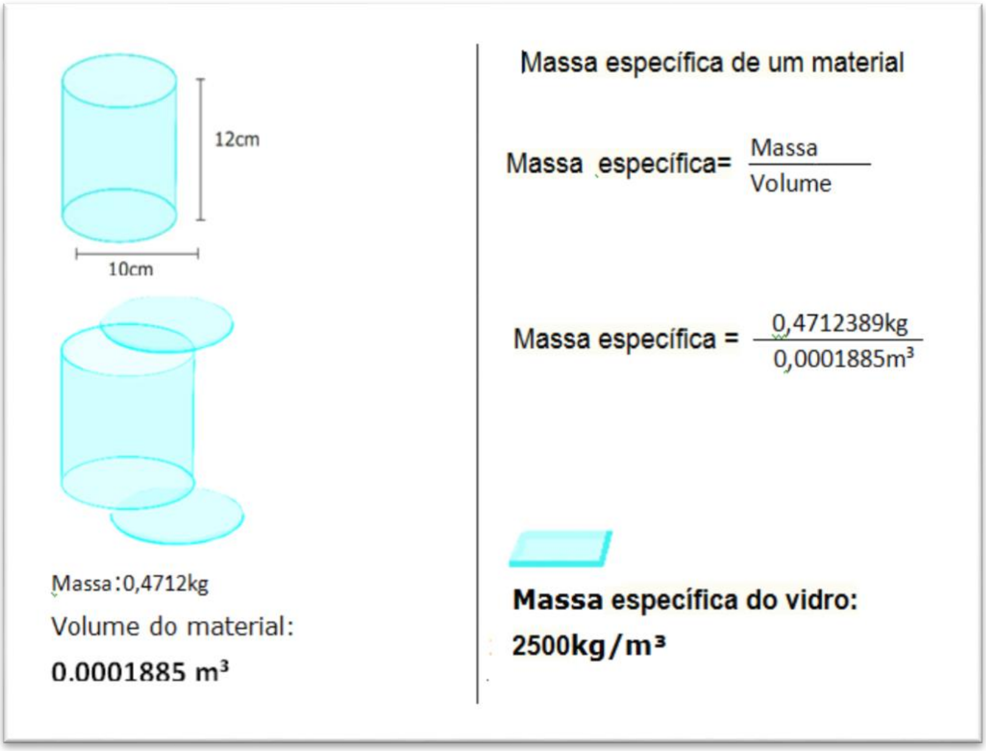
$$\text{Densidade} = \frac{\text{Peso}}{\text{Volume}}$$

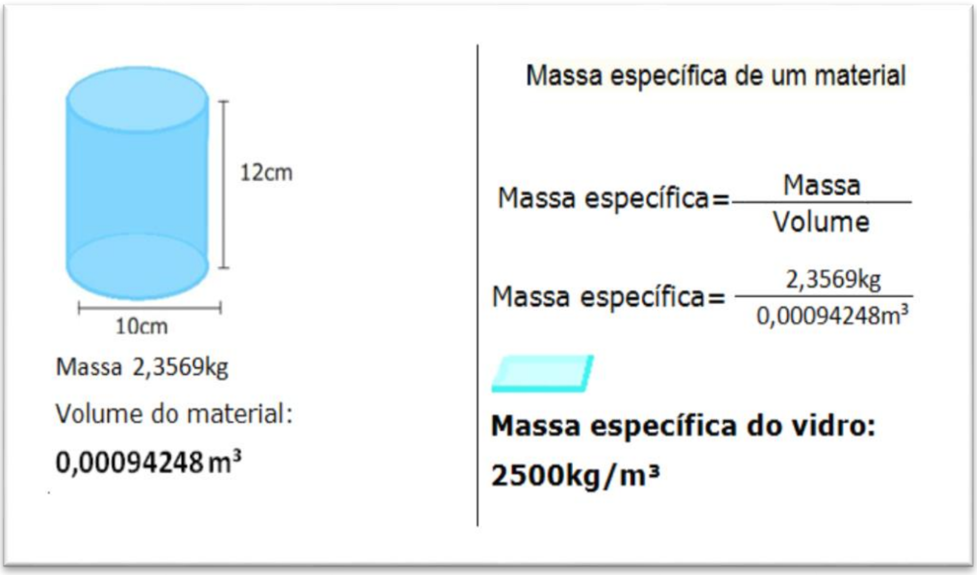
$$\text{Densidade}=\frac{0,4712389kg}{0,00094248m^3}$$

Densidade=500kg/m³.

Massa específica de uma substância ou um material homogêneo é razão entre a massa de um e o seu volume.

$$\text{Massa específica} = \frac{\text{Massa(kg)}}{\text{Volume(m}^3\text{)}}$$





Acesse o endereço abaixo para ver mais exemplos sobre razão entre dois valores ou duas grandezas.

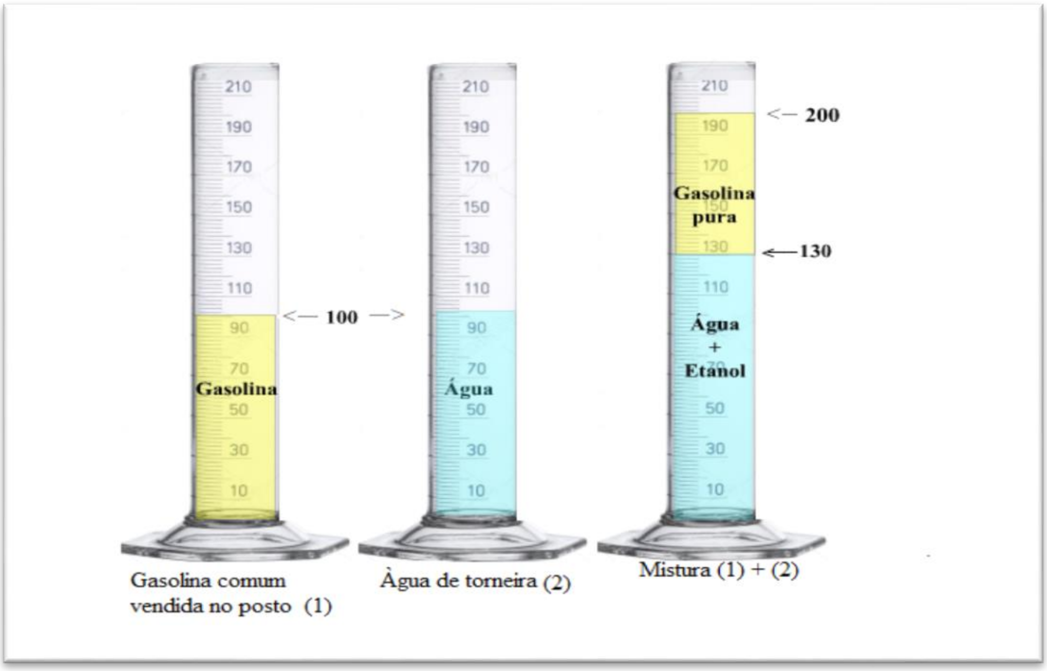
https://pt.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-ratios-rates/pre-algebra-visualize-ratios/v/solving-ratio-problems-with-tables-exercise?modal=1

$$\text{Velocidade da internet} = \frac{\text{Quantidade de bits transmitidos}}{\text{Tempo decorrido}}$$

https://www.minhaconexao.com.br/ <acesso em 22 mar. 2019>, com adaptações.

Situação experimental que envolve razão entre grandezas

Deseja-se verificar a razão entre a quantidade de etanol e a gasolina comum (mistura de gasolina tipo A com etanol), bem como a razão entre a quantidade de etanol e a gasolina tipo A, ambas vendidas no posto em que foi realizado o experimento?



Seque quadro com os dados experimentais relacionada à imagem acima.

Mistura de gasolina comum com água	=	Etanol com água	+	**Gasolina tipo A**
200	=	130	+	**70**

Quadro com a composição da gasolina comum utilizada no experimento.

Mistura de gasolina comum	=	Etanol	+	**Gasolina tipo A**
100	=	30	+	**70**

Em abril de 2019 é permitido ter 27% ±1% de etanol na gasolina comum Já na gasolina aditivada, a quantidade permitida é de 25%.

No experimento constatou-se que a razão entre a quantidade de **etanol** presente na **gasolina comum** vendido no posto em questão é

$$\frac{30}{100}$$

A **razão** entre a quantidade de **etanol** e a **gasolina tipo A** na gasolina comum utilizada no experimento é

30

Fonte consultada: https://duvidasgasolina.hotsitespetrobras.com.br/se-a-petrobras-aumentar-a-producao-de-petroleo-isso-impactara-o-preco-da-gasolina/
http://www.anp.gov.br/images/QUALIDADE/BOLETIM/BQ_COMBUSTIVEIS_032018.pdf

Problemas resolvidos que envolvem razão entre grandezas

1)Qual é a escala na forma 1:E do mapa em que 1,6cm correspondem a 50km?

50km=50km x 1000m/km=50000m

50000m=50000mx100cm/m=5000000cm $5,0\times10^6$cm

$$\frac{1,6\text{cm}}{5\times10^6\text{cm}}=\frac{1,6:(1,6)}{5\times10^6:(1,6)}=\frac{1}{3,125\times10^6}$$

Escala é 1: 3125000

2) Um fusca ano 1980, tem um tanque com capacidade de 41 litros. Enchendo o tanque com gasolina, este percorre 451km na estrada ou 287 km na cidade. Calcule consumo médio em km/L.

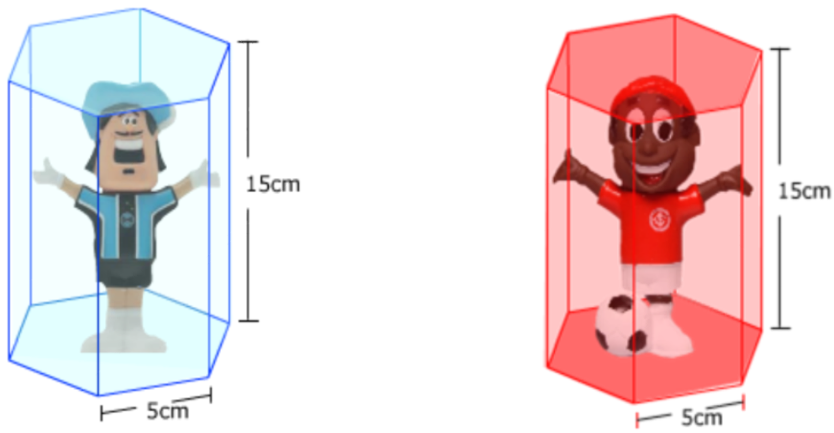
Na estrada:

Consumo médio=451km/(41L) =(451/41)km/L= **11** km/L.

Na cidade:

Consumo médio = 287km/(41L=(287/41)km/L=**7** km/L.

3) O invólucro lacrado das peças ornamentais, mostradas na imagem abaixo, tem formato de prisma hexagonal com as dimensões expressas na imagem. A massa total de cada um é 350g. Qual a densidade expressa kg/m³ de cada uma das peças.



.

Fonte da imagem: https://produto.mercadolivre.com.br com adaptações.

Resolução:

Volume do prisma hexagonal V=$\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}h$.

Lado= 5cm=0,05m.

h=15cm=0,15m.

V=$\frac{3\times(0{,}05\mathrm{m})^2\sqrt{3}}{2}$x0,15m =0,000974,28m³.

Massa=350g = 350g/(1000g)kg=0,35kg.

Densidade=massa/volume.

Densidade=0,35kg/(0,000974,28m³).

Densidade=(0,35/0,00097428)kg/m³ =359,2396kg/m³

A probabilidade clássica P_A é um aplicação de razão

$$P_A = \frac{N^o \text{ de casos possíveis de ocorrer o evento A}}{N^o \text{ total de casos}}$$

Exemplo resolvido

4)Qual a probabilidade de você ganhar um ovo de chocolate se este for sorteado entre os 62 matriculados na disciplina de Pré-cálculos do corrente ano.

Segue uma forma de solução:

$P = 1/62 \cong 0{,}0161$ ou $0{,}0161 \times 100\% = 1{,}61\%$.

5)No primeiro vestibular do curso de Medicina da Unijuí inscreveram-se 1080 candidatos para disputarem as 30 vagas de um curso. Qual a relação candidato-vaga para esse curso?

Solução.

Relação candidato vaga $= \dfrac{1080 \text{ candidatos}}{30 \text{ vagas}} \Rightarrow 36/1$

Resposta: A relação candidato-vaga foi de 36 candidatos por vaga.

2.1.2 Proporção

2.1.2.1 Proporção como igualdade de duas razões.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

Neste caso quatro termos estarão envolvidos. Os termos a e d são chamados de extremos enquanto que b e c são chamados de meios

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

2.1.2.2 Propriedades das proporções

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc \qquad \frac{30}{100}=\frac{3}{10} \Rightarrow 30\text{x}100=10\text{x}300$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d} \qquad \frac{30}{100}=\frac{3}{10}=\frac{30+3}{100+10}=\frac{30-3}{100-10}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad \frac{30}{100}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{30+100}{100}=\frac{3+10}{10}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b+d}=\frac{c}{c+d} \qquad \frac{30}{100}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{30+100}{30}=\frac{3+10}{3}$$

Assista os vídeos dos endereços a seguir: https://www.youtube.com/watch?v=0AzClo5G9KM; https://www.youtube.com/watch?v=sD_vgL4HHPQ;

2.1.2.3 Relação de proporcionalidade

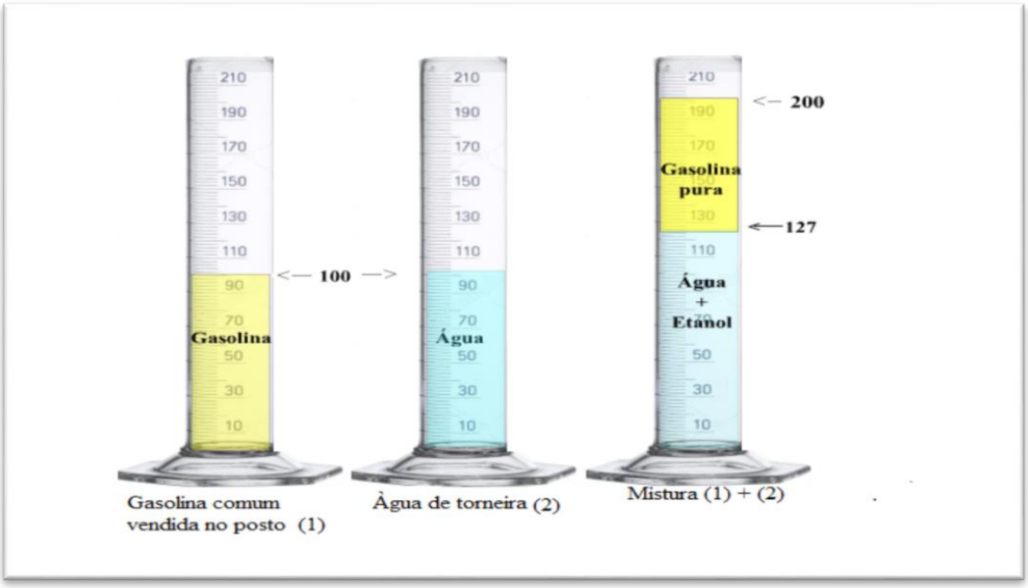
Diz-se que existe uma relação de proporcionalidade entre duas variáveis reais x e y não nulas, se e somente se y=kx ou y =k/x, onde k deve permanecer constante para todo x e y. Quando y=kx, então x e y são diretamente proporcionais. Quando y=k/x , então x e y são inversamente proporcionais.

2.1.2.3.1 Relação de proporcionalidade: y=kx (grandezas diretamente proporcionais)

Exemplo. Relação de proporcionalidade na composição da gasolina comum.

Vamos encontrar a função que representa a relação entre o volume de etanol anidro(y) a ser adicionada à gasolina tipo A(x) para formar a gasolina comum (x+y).

Em abril de 2019, na composição gasolina comum, 27% deve ser etanol e o restante (73%) deve ser gasolina tipo A.



Podemos representar esta informação assim:

	x Gasolina tipo A	y Etanol anidro	x+y Gasolina comum
%	73	27	100
Litros	x	y	$x+y$

Razões envolvidas:

$$\frac{y}{x} = \frac{27}{73} \Rightarrow y \times 73 = x \times 27 \quad \Rightarrow y = \frac{27x}{73} \cong 0{,}3699\,x$$

Ou

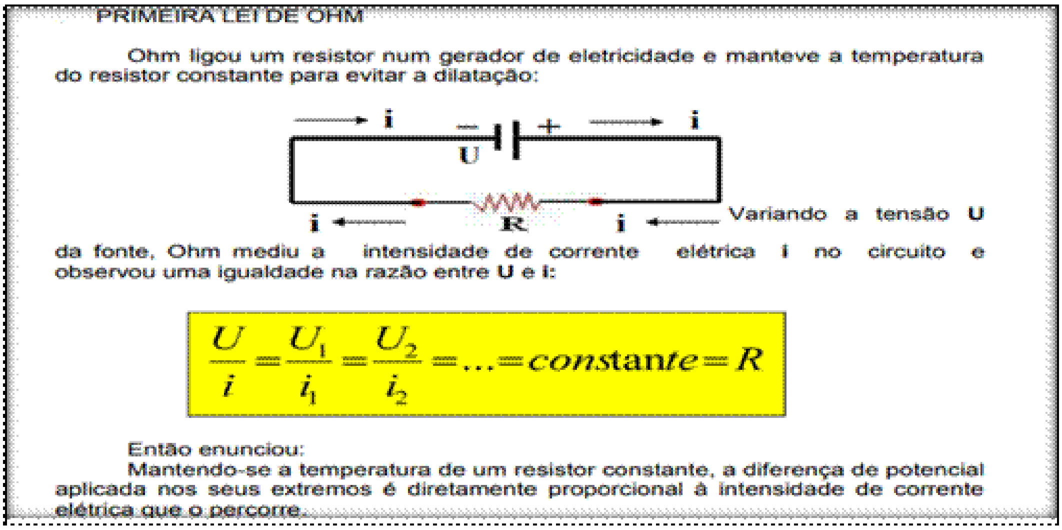
$$\frac{73}{x} = \frac{27}{y} \Rightarrow y \times 73 = x \times 27 \quad \Rightarrow y = \frac{27x}{73} \cong 0{,}3699\,x$$

O valor de **k** da relação proporcional y=kx é **27/73** ≅ 0,3699.

Para este caso, podemos concluir que a razão entre etanol e gasolina tipo A na mistura chamada de gasolina comum é de 27 para 73 ou 0,3699:1 ou aproximadamente 37:100 ou ainda 37% (37 de etanol para 100 de gasolina tipo A). Já a razão entre etanol e gasolina comum (mistura), a razão é de 27%.

A função y=0,3699x pode ser utilizada para saber quanto de álcool deve ser adicionado à gasolina tipo A para que o porcentual de etanol presente na gasolina comum seja de 27%. De modo similar podemos utilizar este esquema para fazer modelos matemáticos para outros casos de misturas que são feitas em fábricas que produzem os materiais para fabricar os produtos que vendem. Por exemplo: Numa fábrica de tubos de concreto, os componentes da mistura utilizada, mantém relações de proporcionalidade entre si, para que as propriedades do material produzido se mantenha constante.

A primeira Lei de OHM é também um exemplo de grandezas diretamente proporcionais" e colocar isso antes da Figura.


PRIMEIRA LEI DE OHM

Ohm ligou um resistor num gerador de eletricidade e manteve a temperatura do resistor constante para evitar a dilatação:

Variando a tensão U da fonte, Ohm mediu a intensidade de corrente elétrica i no circuito e observou uma igualdade na razão entre U e i:

$$\frac{U}{i}=\frac{U_1}{i_1}=\frac{U_2}{i_2}=\ldots=constante=R$$

Então enunciou:

Mantendo-se a temperatura de um resistor constante, a diferença de potencial aplicada nos seus extremos é diretamente proporcional à intensidade de corrente elétrica que o percorre.

Fonte da imagem: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br > Acesso em mar. 2019.

2.1.2.3.2 Relação de proporcionalidade inversa: y=k/x (grandezas inversamente proporcionais)

Diâmetro do fio (mm)	$x = \pi r^2$ Área da secção transversal do fio (mm²)	y Resistência elétrica (Ω/km)	Produto constante $x.y$
10,40	84,95	0,2	16,99
	x	y	16,99

$$x.y = 84{,}95 \,.\, 0{,}2 \Rightarrow y = \frac{84{,}95.0{,}2}{x}$$

$$y = \frac{16{,}99}{x}$$

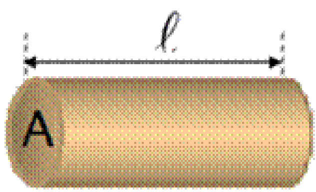
O valor de **k** da relação inversamente proporcional *y*=**k/**x é **84,95×0,2=16,99**. A função *y*=**16,99**/***x*** pode ser utilizada para saber a resistência de fios feitos com o mesmo material, para o mesmo comprimento, mas de diâmetros diferentes.

A segunda Lei de OHM é um exemplo de grandezas diretamente e inversamente proporcionais"

SEGUNDA LEI DE OHM RESISTÊNCIA

Na primeira Lei de Ohm, a resistência elétrica pôde ser obtida a partir da tensão e da intensidade da corrente elétrica que percorre um resistor. Na segunda lei, pode-se obter a mesma resistência elétrica do resistor, de um modo diferente, ou seja, por meio da análise das características do fio condutor.

Dado o fio:



ℓ ⇒ comprimento do condutor de eletricidade.
A ⇒ área de secção transversal do condutor.
Ohm enunciou a segunda lei:

A resistência elétrica de um condutor homogêneo e de secção transversal constante é diretamente proporcional ao seu comprimento, inversamente proporcional à sua área de secção transversal e depende do material do qual ele é feito.

$$\boxed{R = \frac{\rho \cdot \ell}{A}}$$

ρ ⇒ representa a resistividade elétrica do material.
A resistividade é uma característica do material empregado na constituição do fio.

Fonte da imagem: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/ Acesso em mar. 2019.

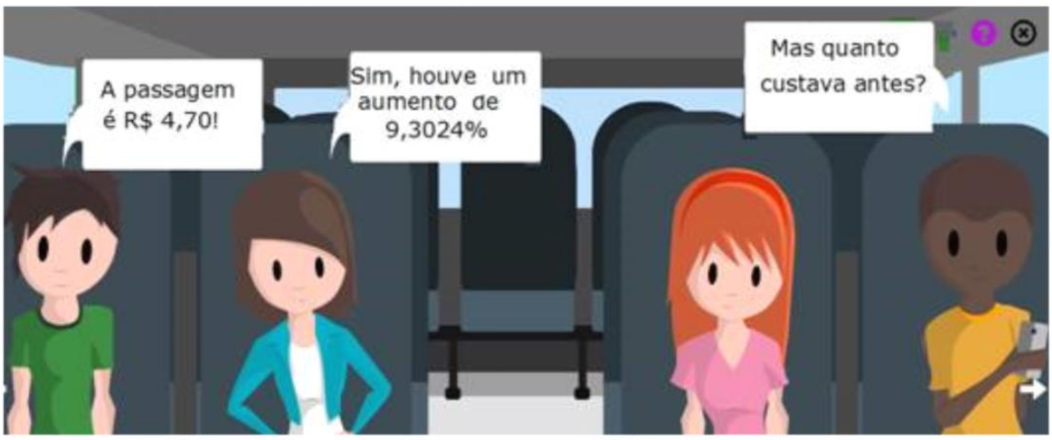
2.2 Regra de Três

Regra de três simples é método prático de organização dos dados para resolver problemas que envolvam grandezas proporcionais, ou seja, envolvem duas razões iguais. O número de termos na igualdade de duas razões sempre são quatro. Quando um dos termos, que estarão envolvidos na proporção, é uma incógnita e os outros três são conhecidas, pode-se utilizar o método de regra de três.

2.2.1 Situação para uso da regra de três para grandezas diretamente proporcional

Se as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, é utilizada a propriedade: "a primeira razão é igual a segunda razão", ou seja, a divisão dos valores dos termos y e x é sempre o mesmo (y/x = k ou ainda y=kx). Então, se as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais podemos escrever:

Veja a situação a seguir.



Fonte da imagem: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/estatistica/Objeto4/index.html > com adaptações. Acesso em mar. 2020.

O problema referente a situação anterior.

A passagem dos ônibus urbanos em Porto Alegre teve um aumento de 9,3024% em fevereiro de 2019. Após o aumento a passagem passou para R$ 4,70. Encontre o valor do aumento e o valor da passagem **antes** deste aumento e ?

O aumento de 9,3024% pode ser expresso numa razão, pois o símbolo % significa dividido por 100. O valor do aumento, em reais é diretamente proporcional ao percentual de aumento

$$9{,}3024\% = \frac{9{,}3024}{100}$$

Esquematizando os dados da situação na forma de regra de três temos:

Colocando os valores numa tabela para separas as grandezas e indicar os termos da razão temos:

Grandezas	Antes do aumento	Aumento	Após o aumento
%	100	9,3024	109,3024
R$	y		4,70

Para o caso do problema

$$\frac{100}{y} = \frac{109{,}302}{4{,}70} \Rightarrow y \times 109{,}3024 = 100 \times 4{,}70$$

$$y = \frac{100 \times 4{,}70}{109{,}3024}$$

$y = 4{,}299997 \Rightarrow y = \text{R\$ } 4{,}30$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow y \times a = x \times b \Rightarrow y = \frac{bx}{a}$$

$$y = (b/a)\,x$$

2.2.2 Situação para uso da regra de três para grandezas inversamente proporcionais

Se as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais, é utilizada a propriedade: “a primeira razão é igual a segunda razão invertida”, ou seja, o produto dos valores dos termos y e x é sempre o mesmo (x.y = k ou ainda y=k/x). Então, se as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais podemos escrever:

Veja a situação a seguir:

Dada a situação acima:

Considerando que o preço do passeio por pessoa(p) é inversamente proporcional ao número de pessoas que vão ao passeio(n), então o produto destes valores é constante.

	n–Número de estudantes do passeio	p–Valor da passagem por pesso	$n \times p$ Produto constante
Informado	50	20,00	1000
Pretendido	35	p	1000

Cálculos envolvidos:

$$35 \times p = 50 \times 20 \Rightarrow p = \frac{50 \times 20}{35}$$

$$p = \frac{1000}{35}$$

p = 28,57

O valor de **k** da relação proporcional $p=k/n$ é **35. 28,57** $\cong$ **1000**.

A função $p=1000/n$ pode ser utilizada para saber o valor do passeio para outro número de estudantes. Este número obviamente deve ser inteiro e positivo e no máximo 50.

Resolva os exercícios do endereço a seguir:

https://pt.khanacademy.org/math/pre-algebra Inscreva-se neste canal para rever conceitos básicos da matemática elementar.

2.3 Porcentagem

A porcentagem é uma razão onde o segundo termo é 100 ou uma fração com denominador 100. Ao invés de colocar o número 100 no segundo termo da razão ou no denominador, coloca-se o símbolo%. Este símbolo sempre indica divisão por 100.

Taxas de juros muitas vezes são expressas em taxa unitário, ou seja, expressa uma razão cujo segundo termo é 1, neste caso as taxas estão escritas em decimais. Se multiplicar a taxa unitária por 100 e acrescentar o símbolo de % já estará transformada para porcentagem.

Para resolver problemas de porcentagem pode-se utilizar a regra de três, ou seja, pela entre duas razões.

A seguir são apresentadas situações que envolvem porcentagem. Resolva cada situação problema apresentada o item a seguir.

2.3.1 Problemas que envolvem porcentagem

Segue uma lista de problemas corriqueiros que podem ser resolvidos utilizando a propriedade fundamental das proporções.

$$\frac{a}{b} = \frac{P}{100} \Rightarrow a \times 100 = b \times P$$

1) Quanto é **12%** de 348?

2) Qual o percentual que o valor **12** representa com relação a **348**?

3) Qual o percentual que o valor **348** representa com relação a **12**?

4) Qual será o **novo**(**a**+**b**) valor de uma mercadoria que hoje é R$ **348,0** e amanha estará com um **aumento** de **12%**?

Calcule também:

a)Qual percentual que o **novo** valor representa com relação ao de hoje?

b)Qual percentual que o valor de hoje representa com relação ao **novo**?

c)Qual percentual que o valor do **aumento** representa com relação ao **novo**(a+b)?

5) Qual será o **novo**(*a*-*b*) valor de uma mercadoria que hoje é R$ 348,0 e terá um **desconto** de 12%?

Calcule também:

a)Qual percentual que o **novo**(*a*-*b*)? valor representa com relação ao de **hoje**?

b)Qual percentual que o valor de **hoje** representa com relação ao **novo**(*a*-*b*)?

c)Qual percentual que o valor do **desconto** representa com relação **novo**(*a*-*b*)?

6)Após um **aumento** de **15%** um notebook foi vendido por R$ **2800,00**(*a*+*b*)?. Qual era o valor do **aumento**? Qual era **o valor antes** do **aumento**?

7)Após um **desconto** de **10%** do **valor da etiqueta**, um notebook foi vendido por R$ **2800,00**(*a*-*b*). Qual era o valor **na etiqueta antes** do **desconto**?

8)Após um aumento de 18% o valor registrado na etiqueta passou a ser R$ 2000,00 Qual foi o valor do aumento e o valor que constava na etiqueta anterior ao aumento?

9)Após um aumento de 10% do valor da etiqueta, um notebook foi vendido por R$ 3000,00. Qual era o valor do na etiqueta? Qual era o valor do na etiqueta?

Para sumular vários tipos de problemas que envolvem os conteúdos da unidade 2, baixe a planilha Simulador: Unidade 2 do Pre - Cálculo.